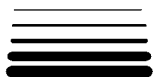
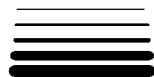




ФИЛОСОФИЯ И НАУКА



История и философия науки



ИНТЕРПРЕТАЦИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ В МАТЕМАТИКЕ

В.Х. ХАХАНИЯН

Основные стратегии доказательства существования

Основная задача исследования онтологии математического дискурса состоит в выяснении традиционных способов, которыми математик устанавливает существование предметов. С этой целью нужно обратить внимание на математические предложения, утверждающие существование какого-либо объекта. Рассмотрение доказательств таких предложений дает понять, в каком смысле употреблено в нем это слово. Способ доказательства существования проясняет интерпретацию существования в утверждении существования.

Если разбирать математические тексты, то можно увидеть *три способа* доказательства существования (основных!) и, соответственно, три способа определить онтологический статус предмета исследования.

Самый распространенный способ доказательства состоит в непосредственном построении объекта, в существовании которого нужно убедиться. В качестве классических областей применения такого рода доказательств можно указать евклидову геометрию, алгебру и теорию чисел. Однако его употребление естественно и для не финитных областей, например, для функционального анализа. Пример: известная теорема функционального анализа утверждает, что для любого сжимающего отображения полного метрического пространства в себя существует единственная неподвижная точка этого отображения. Доказывается утверждение так: в метрическом пространстве берется произвольная точка, сжимающее отображение применяется сначала к этой точке, потом к получившемуся в результате применения образу этой точки, потом к образу образа и т.д. Возникающая последовательность имеет предел и этот предел – точка пространства, не изменяющаяся при применении к ней данного отображения.

Как в формулировке этой теоремы, так и в ее доказательстве фигурируют лишь общие термины. Доказательство же проведено так, что все общие термины можно заменить на единичные. Задав некоторое полное метрическое пространство (отрезок прямой линии), т.е. указав вполне определенный единичный предмет, обладающий всеми требуемыми свойствами, и задав конкретное сжимающее отображение на нем, можно, пользуясь прописанной в доказательстве схемой, указать на некоторый,

также вполне определенный, единичный предмет, обладающий всеми требуемыми свойствами (т.е. являющийся неподвижной точкой отображения). Указание единичного предмета — важнейший момент такого рода рассуждений. Хотя само рассуждение и проводилось абстрактно, т.е. безотносительно каких-либо единичностей, но возможность работы с ними и составляет его реальный смысл. Любой включенный в рассуждение индивидуальный предмет получает в ходе проводимого рассуждения полную определенность (ясность онтологического статуса) в силу его отличия от любого другого предмета, указанного иным способом.

Итак, о каком-либо объекте можно сказать, что он существует, если приведена конечная схема, которая, примененная к указанному вполне определенному объекту, приводит к построению рассматриваемого объекта. Тот факт, что схема, на которую мы ссылались в нашем примере, содержала построение бесконечной последовательности, еще не нарушает конструктивности определения существования. Предел последовательности есть вполне определенный объект, построение которого, при заданной сходящейся последовательности, вовсе не требует таких абстракций, как актуальное предъявление всей бесконечной последовательности. Выяснить, например, что последовательность $x_n = 1/2^n$ сходится к 0, можно и с помощью легко завершаемой процедуры. Это верно не для любой последовательности. Но в данном примере такую последовательность указать можно (например, если задать отображение, которое каждой точке отрезка будет ставить в соответствие точку, расположенную в два раза ближе к фиксированному концу отрезка). Именно эта возможность и важна для определения существования в конструктивном смысле. Слово «существует» в рамках рассмотренной интерпретации должно быть прочитано так: «существует единичный объект, который можно непосредственно указать».

Конечно же, математическое рассуждение не ограничивается такими, связанными с вполне определенными единичными объектами, построениями. Математический анализ имеет дело с объектами, которые не могут быть вполне определены с помощью конечной процедуры построения. Характерный пример — иррациональное число, которое определяется либо как последовательность рациональных чисел, либо как сечение на множестве рациональных чисел. В любом случае такое определение объекта предполагает предъявление какой-то бесконечной совокупности и о его существовании уже невозможно говорить в рассмотренном выше смысле. Тем более это невозможно, если речь идет о последовательностях или о бесконечных множествах вещественных чисел. Названные объекты, однако, активно изучаются в анализе. В математике известны два способа говорить о существовании такого рода неконструктивных объектов.

Первый неконструктивный способ интерпретации существования связан с законом исключенного третьего. На нем основаны все доказательства от противного. Приведем пример. Одна из центральных теорем анализа утверждает, что если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел. Доказательство этого факта часто проводят, предположив, что данная последовательность не фундаментальна (т.е. не удов-

летворяет критерию Коши). Из этого предположения легко выводится, что последовательность в таком случае и не ограничена, что противоречит условиям теоремы. Далее, на основании закона исключенного третьего утверждается фундаментальность рассматриваемой последовательности и, соответственно, наличие предела. Никаких указаний на какое-либо конкретное число, могущее быть пределом последовательности, равно как и на способ его вычисления, нет ни в формулировке, ни в доказательстве теоремы. Здесь можно усмотреть какую-то схему, которая может быть применена к заданной последовательности, т.е. к определенному единичному предмету. Но к построению другого единичного предмета (в существовании которого и требуется удостовериться) предложенная схема не приведет. Этот предмет останется предметом гипотетическим. Нет никаких реальных критериев для того, чтобы отличить его от какого-либо другого. Брауэр, о взглядах которого на проблему существования будет сказано ниже, считал, что философским основанием для такого типа рассуждений является реализм (или платонизм), неправомерно перенесенный на математические объекты. Утверждая, что бесконечная последовательность (которую мы не построили и не можем построить) должна быть либо фундаментальной, либо нефундаментальной, мы верим в некоторое положение дел, существующее независимо от нас в каком-то идеальном мире. Наше суждение об этом положении дел может быть истинным или ложным, сама же реальность никак не связана с нашими действиями.

Брауэр считал неправомерным использование закона исключенного третьего потому, что, по его убеждению, математические объекты и их отношения не есть независимая от субъекта реальность, а есть продукт собственной деятельности субъекта. Можно не принимать такую точку зрения, но трудно отрицать, что онтологический статус предмета, определенный подобным образом, остается довольно сомнительным. Мы оперируем с предметом, присутствие которого непосредственно не удостоверено. Можно сказать, что такой предмет не существует в подлинном смысле, а существует виртуально. Не имея возможности предъявить его в рассуждении, мы рассуждаем так, как если бы он существовал (как если бы был построен). Установив существование с помощью закона исключенного третьего, часто имитируют непосредственное указание на этот предмет, вводя для него имя, участвующее далее во всех рассуждениях.

Другой способ понимания существования в отношении предметов математики также связан скорее с предположением о существовании (по крайней мере, если сопоставлять его с конструктивным предъявлением индивида). Введение целых классов предметов осуществляется с помощью мыслительного хода (например, введение отрицательных или иррациональных, или комплексных, чисел при решении алгебраических уравнений). В рассуждение вводится мысленный объект, который не указывается конструктивно. Про него лишь говорится, что он может участвовать в различных манипуляциях с числами наравне с числами «настоящими» (рациональными). Для него придумывается специальный знак, который подставляется в формулы. Причем результатом применения к нему этих формул оказывается вполне

определенное, вычисляемое число. Сам же этот объект по существу отождествляется с тем знаком, который подставляется вместо него в формулу.

Что же позволяет считать такие объекты существующими? Здесь оказывается уместной интерпретация существования, предложенная Пуанкаре: критерием существования является свобода от противоречия. Все формулы, в которые подставляются введенные для таких предметов знаки, не должны противоречить друг другу. Пуанкаре говорил, что имеется система постулатов, и если эти постулаты не заключают в себе противоречия, то мы вправе рассматривать их как определения одного из тех понятий, которые фигурируют в этой системе предложений.

Названные интерпретации существования будут рассмотрены ниже. Каждая имеет солидную философско-математическую базу. Построение такой базы требует выявления ряда неявно присутствующих предпосылок. Сознательный выбор такого рода предпосылок не раз предпринимался ведущими математиками. Рассмотрим взгляды основных представителей таких предпосылок.

Концепция существования у Кантора

В работах Георга Кантора¹ есть места, в которых он довольно точно объясняет, что следует считать существующим в математике. Он полагал, что целые числа действительно существуют, поскольку они занимают вполне определенное место в нашем рассудке, ясно отличаются от остальных частей нашего мышления и находятся с ним в определенных отношениях. Такого рода реальность Кантор называл «имманентной» и отличал от реальности «транзиентной». Вторая приписывается числам постольку, поскольку они рассматриваются как отображения процессов во внешнем мире. Отметим, что «транзиентная» реальность, по Кантору, включает как «телесную», так и «духовную» природу. Оба вида реальности, считает Кантор, всегда совпадают в том смысле, что какое-либо понятие, принимаемое за существующее в первом виде, обладает в известных отношениях и во втором виде.

«Транзиентная» реальность, будучи трансцендентным интеллекту внешним миром, все же совершенно ясно представлена определенными понятиями. Эта определенность и служит критерием существования. Так как основные усилия Кантора направлены на обоснование реальности объектов создаваемого им учения о бесконечных множествах, то речь идет об определенности этих множеств и их элементов. Поэтому математика должна считаться лишь с имманентной реальностью своих понятий и не обязана проверять также их транзиентную реальность. Кантор считал², что многообразие (совокупность, множество элементов, принадлежащих любой сфере понятий) определено, если на основе его определения и вследствие закона исключенного третьего становится возможным рассматривать внутренне определенным и то, является или не является его элементом любой объект указанной сферы, а также и то, равны или нет друг другу два принадлежащих множеству объекта.

Выяснять, принадлежит ли данный предмет указанному множеству, а также устанавливать его тождественность с другим предметом на основа-

нии закона исключенного третьего можно, лишь предположив у него наличие определенных свойств. Это означает, что предмет рассматривается как сущность, могущая выступать в качестве субъекта суждения. Следовательно, Кантор склонен рассматривать множество как класс сущностей, объединенных на основании определенной общности признаков. Поскольку в его учении сами множества могут рассматриваться как элементы других множеств, то значит и сами эти классы следует считать сущностями.

Объекты своего учения Кантор вводит с помощью отвлечения от общих признаков, присущих классу сходных предметов. Именно так он определяет понятия мощности и порядкового типа. Обе характеристики он рассматривает как общее свойство множеств, возникающее путем абстрагирования от всех особенностей. Кантор пытается рассматривать трансфинитные числа по аналогии с конечными целыми числами. Последние действительно можно рассматривать как результат абстрагирования от особых свойств конечных множеств. Так, число четыре есть то общее, что присуще четырем яблокам, четырем ножкам стула и т.д. — это весьма традиционное представление, восходящее к Аристотелю. Кантор же склонен рассматривать любое множество как сущность. Оно должно считаться существующим, если каждый его элемент вполне определен. Тогда и само множество вполне определено и его существенный признак также рассматривается как вполне определенный. Кантор, по-видимому, был склонен субстантивировать и эти существенные признаки. Он даже пытался описать их в аристотелевских категориях материи и формы, утверждая, что совокупность элементов множества следует рассматривать как материю порядкового числа, а порядок, существующий между этими элементами, как форму³.

Брауэровская концепция существования

Выше было выделено такое понимание существования предмета в математике, которое основано на возможности непосредственно указать на этот предмет с помощью определенной завершенной процедуры: предмет существует, если он может быть сконструирован. Такая интерпретация существования является атрибутом интуиционистской школы (существенным признаком, отличающим ее от других школ). Но такое понимание существования нуждается в серьезном углублении.

Конструктивность математических объектов не появляется в математике интуиционистской школы как нечто само собой разумеющееся. Для Брауэра она — необходимое следствие анализа когнитивной деятельности человека. Структура математического рассуждения, по Брауэру, отражает, прежде всего, эту деятельность и является наиболее чистым ее выражением.

Брауэровская математика чаще всего рассматривается в контексте кризиса оснований, вызванного обнаружением известных парадоксов и антиномий. Поэтому в требовании конструктивности математических объектов видят, главным образом, попытку устранить из математики самую возможность противоречия. Однако сам Брауэр идет гораздо дальше этой попытки. В целом ряде его работ обнаруживается не столько математический, сколько чисто философский интерес автора. Брауэр

озабочен не обоснованием корректности математических процедур, а исследованием когнитивной деятельности мысли как таковой. При этом он имеет явное намерение основать принцип существования в математике на исходных структурах мысли. Им предпринята попытка трансцендентального анализа, призванного обосновать основные математические понятия как производные от форм интеллектуальной деятельности.

Брауэр представляет когнитивную активность человека в виде последовательности ясно отличимых друг от друга восприятий. В одной из своих ранних работ он пишет: «Человек наблюдает в мире последовательности событий, причинные цепи, разворачиваемые во времени. Основным феноменом этого наблюдения является сама интуиция времени, в которой происходит повторение восприятий или действий. Эта интуиция обнаруживается как последовательность моментов, разбивающих жизнь на последовательность вещей, качественно отличимых друг от друга»⁴. Не само по себе восприятие определяет структуру мысли. Брауэр выделяет нечто, называемое «элементарный акт мысли», который он описывает как «разделение моментов жизни на качественно различные части, которые, будучи разделены лишь временем, могут быть снова объединены»⁵. Из этого не очень ясного высказывания можно заключить, что акт мысли не есть простое действие или восприятие, связанное с определенным моментом времени. Элементарный акт мысли состоит именно в различении моментов. Иными словами, элементарный акт мысли производит выделение отличных друг от друга индивидов, причем отличие их определяется разделяющими их промежутками времени. Производится организация времени, в котором, как в некоторой аморфной среде, выделяются фиксированные дискретные моменты. Это значит, что деятельность мысли определена двумя основными интуициями: дискретная последовательность и непрерывная среда (линейный континуум).

Естественным примером такой расчленяющей деятельности является деление отрезка прямой линии при нанесении на него последовательности точек. Само построение отрезка, отличимого от других отрезков, его выделение в качестве отдельного восприятия можно считать элементарным актом мысли. Но серия других элементарных актов, состоящих в делении построенного отрезка, позволяет различать в его пределах и другие восприятия, части этого отрезка. Сами восприятия, будучи ограничены какими-то границами (концы отрезка), могут быть безгранично делимы. Мы полагаем, что именно это имел в виду Брауэр, когда писал: «Возможность мысленного объединения нескольких единиц, связанных некоторым промежутком, никогда не исчерпывается вставлением новых единиц». В результате процедуры деления отрезка мы структурируем ранее нерасчлененное единство и создаем определенную дискретную последовательность в пределах непрерывной среды. Таким образом, мы все больше определяем эту самую среду, устанавливая отношения ее частей⁶. Две основные интуиции мысли находятся в состоянии постоянного взаимного определения и дополнения. Дискретная последовательность моментов структурирует аморфную среду, нечто постоянно не доопреде-

ленное, остающееся между названными моментами. Приведенный геометрический пример является парадигмальным для описания любой когнитивной деятельности. Последняя, по Брауэру, состоит в различении моментов восприятий в непрерывной временной среде и расчленении и уточнении самих восприятий.

Математика представляет собой наиболее чистое и, по-видимому, наиболее развернутое выражение такой деятельности. Френкель и Бар-Хиллел⁷ приводят следующее высказывание Брауэра: «Изначальная интуиция математики и всякой интеллектуальной деятельности представляет собой основу всех наблюдений за какими бы то ни было изменениями, поскольку при этих изменениях игнорируются все качественные свойства». Отвлечение от всякого чувственного содержания дискретной последовательности различающихся актов мысли и создает представление целого числа, точнее, последовательности целых чисел, счета. При этом континуум, который Брауэр также называет основной интуицией, оказывается как бы в подчиненном положении. Он должен быть определен в ходе развертывания дискретной (числовой) последовательности.

Числовая последовательность оказывается для Брауэра основным математическим объектом. Конструирование, которое, согласно Попперу, является единственным онтологически значимым для математики процессом, следует рассматривать именно как конструирование числовых последовательностей. Впрочем, такое конструирование часто является не самоцелью, а скорее способом определения непрерывного протяженного предмета. Последний не есть реальность, данная до всякого построения. Он среда, а не вещь. Существует то, что происходит в этой среде, точнее, что создается субъектом, действующим в пределах, заданных этой средой. Создается же им дискретная числовая последовательность. Основопологающим отношением для любой последовательности является отношение «до — после» (отношение порядка). Это отражает ведущую роль интуиции времени в математике. Структура различия, вносимая субъектом в среду, является временной структурой. Основным различием, существующим между создаваемыми элементами, является различие во времени. Определенность предмета возникает еще при одном условии, которое и делает окончательно ясной роль конструктивности. Необходимо принять во внимание еще одну важную характеристику когнитивной деятельности, на которую указывает Брауэр. «Человеческое поведение включает попытку удерживать достаточно длинную цепь вещей с тем, чтобы иметь возможность перейти мысленно от последней к более ранней. Результатом такого действия является обнаружение правила, закона, формирующего последовательность»⁸.

Коль скоро когнитивная деятельность подразумевает удержание в мысли некоторого единства, чего-то целого, явленного в последовательных восприятиях (или действиях), то математика должна, выражая эту способность, конструировать единый предмет из многих элементов последовательности. Конструкция оказывается необходимой потому, что создает единство многих конструктивных элементов (различных моментов или восприятий). Конструирование лежит в основе человеческого

понимания всякого предмета вообще. Благодаря созданной конструкции предмет предстает человеку как существующий. Это важно, коль скоро речь идет о протяженном предмете, представление которого связано с делением, с непрерывно диящимся восприятием. Смысл конструирования состоит в создании целостной структуры различных элементов в текучей и неопределенной среде.

Брауэром была реализована трансцендентальная установка, причем в том виде, в каком она была у Канта. К онтологической проблематике он подходит со стороны анализа рассуждения и выясняет, как должен быть устроен предмет, чтобы фигурировать в рассуждении в качестве существующего. Более того, Брауэр выясняет, что предмет должен быть для этого создан в результате конструктивной деятельности, разворачиваемой во времени. Такая конструктивная деятельность сводится к созданию единой структуры. Именно так понятый математический объект может рассматриваться как существующий. Единая структура, с другой стороны, разворачивается согласно закону, правилу, устанавливаемому для ряда вещей или восприятий. Трудно интерпретировать это правило иначе, как действие способности суждения, как установление обобщающей гипотезы для совокупности установленных ранее фактов.

Интерпретация существования у Гильберта

Понимание существования математического предмета в рамках формального направления в математике представляется, на первый взгляд, совершенно противоположным интуиционистскому. В книге Френкеля и Бар-Хиллела⁹, утверждается, что Гильберт скорее всего солидаризировался бы в этом вопросе с Пуанкаре, отождествляя существование со свободой от противоречия. Следующее высказывание Гильберта уточняет и подтверждает эту точку зрения. «В доказательстве непротиворечивости установленных аксиом я усматриваю вместе с тем и доказательство существования совокупности действительных чисел или, употребляя выражение Кантора, доказательство того, что система действительных чисел является «консистентным» (готовым) множеством...». И далее: «Под множеством действительных чисел мы должны, согласно этой точке зрения, понимать не совокупность всевозможных законов, которым будут следовать элементы фундаментальных последовательностей, а скорее — как это было изложено выше — систему вещей, взаимоотношения которых задаются с помощью ранее указанной конечной и замкнутой системы аксиом».

Здесь видна серьезность расхождения Гильберта с Брауэром. Гильберт совершенно недвусмысленно говорит о множестве действительных чисел как о существующем объекте. Такое допущение абсолютно невозможно для Брауэра, поскольку множество действительных чисел, понятое к тому же как совокупность вещей, начисто исключается всякой интуицией и не может быть сконструировано. Мы имеем дело с принципиально иной философской установкой, выражающейся, в частности, в попытке иначе (чем основываясь на понятии конструктивности) определить онтологический статус предмета.

Тем не менее, не нужно глубокого проникновения в суть формальной математики, чтобы увидеть ряд черт, сближающих ее с интуиционистской. Прежде всего, обращает на себя внимание слово «финитность», использованное самим Гильбертом в качестве основной характеристики своего метода рассуждения. Сам этот термин, указывающий на завершенность осуществляемых процедур (по сути, на конструктивность), мог бы быть применен и к интуиционистской математике. Френкель и Бар-Хиллел, например, в качестве окончательной формулы финитного метода рассуждения приводят следующую цитату из Ж. Эрбрана (известного математика, ученика Гильберта¹⁰): «Всегда рассматривается лишь конечное и определенное число предметов и функций, функции эти точно определены, причем определение позволяет произвести однозначное вычисление их значений; никогда не утверждается существование какого-либо объекта без указания способа построения этого объекта; никогда не рассматривается (как вполне определенное) множество всех предметов X какой-либо бесконечной совокупности». Любой представитель интуиционистского или конструктивного направления опознал бы в приведенном отрывке описание своего собственного метода рассуждения. Но речь идет об основных принципах формального метода. Заметим, что приведенное определение явно противоречит цитированному выше рассуждению Гильберта о существовании множества всех действительных чисел.

Важным уточнением по отношению к определению Эрбрана является указание на наглядность финитного объекта. Лучшим примером, иллюстрирующим эту наглядность, является рассуждение, проводимое в формальной алгебре. Имея запас букв и специальных знаков, мы конструируем объекты, руководствуясь заранее заданными правилами. Начиная с простейших объектов, состоящих из одной буквы, мы можем построить множество разнообразных и весьма сложных объектов. Но каким бы ни было проводимое рассуждение, его справедливость может быть проверена наглядно, поскольку оно всегда непосредственно представлено. Узнать что-либо о предмете означает построить его, любой предмет алгебры возникает под руками исследователя и процедура его возникновения полностью доступна наблюдению. Финитное рассуждение выше характеризуется как прямое содержательное рассуждение, совершающееся в виде мысленных экспериментов над наглядно представимыми объектами.

Если бы, занимаясь математикой, мы могли бы постоянно оставаться в рамках финитных рассуждений, то естественно было бы понимать существование математического объекта в смысле его конструктивности. Но предметы математики часто не являются финитными объектами. Можно привести целый ряд примеров того, как в математике возникают предметы, которые невозможно сконструировать и которые не могут быть представлены наглядно. Уже арифметика требует использования не финитных рассуждений, прибегая к *tertium non datur* для обоснования высказываний о целых числах. Число, о свойствах которого мы судим на основании закона исключенного третьего, не представлено наглядно, и может не быть доступно конструированию с помощью конечной процедуры.

Математический анализ практически полностью основан на рассуждениях о не финитных предметах. Не финитным является действительное число, определяемое через бесконечную совокупность целых чисел. Но анализ не ограничивается рассмотрением бесконечной совокупности целых чисел и обращается к предметам еще более не финитным, рассматривая бесконечные совокупности действительных чисел в качестве актуально данных совокупностей. Используемые при этом рассуждения никак не могут апеллировать к наглядности. Естественно, что обращение к конструктивности как критерию существования оказывается бессмысленным для математического анализа. Говоря точнее, этот критерий заставляет считать названные (не финитные) предметы своего рода химерами, странными измышлениями математиков, которые попросту не существуют.

Такой жесткий вывод и был, собственно, сделан интуиционистской школой, реализация программы которой урезала значительную часть математического анализа и всей математики. Намерение Гильберта было прямо противоположным: обосновать корректность частей математики, для которых существованию обращение к принципиально не финитным объектам и это обусловило его обращение к той интерпретации существования, которая и была в свое время предложена Пуанкаре. Разработанный Гильбертом аксиоматический подход позволял достаточно ясно сформулировать, что означает свобода от противоречия в качестве критерия существования. Доказательство существования превращалось в доказательство непротиворечивости системы аксиом. То, как Гильберт предполагал доказывать непротиворечивость, придает понятию финитности совершенно новый смысл.

Суть стратегии Гильберта сводилась к тому, чтобы, формализовав основные методы рассуждения в математике, установить их непротиворечивость путем анализа самого рассуждения. Объектом изучения стали не математические предметы, а рассуждения об этих предметах. Но рассуждение в математике, как и всякое человеческое рассуждение вообще, даже будучи обращено к бесконечному предмету, само остается конечным. Поэтому наука, изучающая рассуждения и названная Гильбертом метаматематикой, по определению имеет дело только с финитными объектами.

Сама математика может сколько угодно оперировать с бесконечностью. Но ее оперирование будет всегда выражено в виде конечного текста, записанного по определенным правилам. Требование наглядности оказывается особенно важным. Мы можем быть уверены в производимых нами математических рассуждениях, если доказана их непротиворечивость. Доказательство же непротиворечивости, производимое на метауровне, может и должно быть наглядным, непосредственно очевидным. Объект, конструируемый в ходе метарассуждения, возникает у нас на глазах и его свойства (в частности, свойство непротиворечивости) оказываются наглядно представимыми и непосредственно проверяемыми. Здесь особую роль играет знаковая природа математического рассуждения. В нем любой (в том числе и бесконечный) предмет представлен знаком, конечным и доступным непосредственному восприятию. Это обстоятельство

специально подчеркивалось Гильбертом: «Кое-что уже дано в нашем представлении для применения логических выводов и для выполнения логических операций: объекты, которые имеются в созерцании до всякого мышления в качестве конкретных переживаний. Для того, чтобы логические выводы были надежны, эти объекты должны быть обозримы полностью, во всех частях; их показания, их отличия, их следование, расположение одного из них наряду с другим дается непосредственно, наглядно, одновременно с другими объектами, как нечто такое, что не может быть сведено к чему-либо другому и не нуждается в таком сведении...». И затем: «В математике предметом нашего рассмотрения являются конкретные знаки сами по себе, облик которых, согласно нашей установке, непосредственно ясен и может быть впоследствии узнан». (Из доклада Д. Гильберта, прочитанного на интернациональном математическом конгрессе в Болонье 3 сентября 1928 г.; см. также *Прим. 11.*)

Таким образом, по отношению к метаобъекту Гильберт предъявляет требования, пожалуй, более жесткие, чем Брауэр по отношению ко всем объектам математики. Последний не настаивает на наглядности. Гильберт и Бернайх характеризуют установки интуиционизма как расширение финитной установки. Френкель и Бар-Хиллел указывают, что такими интуициями для Гильберта являются первичные представления о тождестве и различии, а именно о самотождественности знака, который должен быть опознан как один и тот же при разных вхождениях в формулы и при этом отличен от всякого другого знака. Сделаем два замечания. Во-первых, названные элементарные конфигурации, строго говоря, не являются уже знаками. Точнее, они могут быть названы знаками в силу их происхождения, поскольку именно в качестве знака выступали для математического рассуждения. В нем они действительно обозначают нечто иное: математический объект, о котором ведется рассуждение. Но как только само математическое рассуждение превращается в объект, т.е. становится предметом метаматематического рассуждения, эти знаки уже ничего не обозначают. Они выступают лишь как первичные структурные элементы, из которых складывается, как из деталей конструктора, исследуемое математическое рассуждение.

Во-вторых, сами эти знаки оказываются объектами. Они конструируются как некоторые графические конфигурации и в качестве таковых уже сами являются предметами рассуждения. Здесь необходимо вернуться к вопросу о тождестве и различии, которые у Френкеля и Бар-Хиллела названы первичными интуициями формальной математики. Такой подход к интерпретации элементарных объектов метаматематического рассуждения был подвергнут критике, например, там, где проблема тождества и различия рассмотрена как чисто логическая и не нуждающаяся в ссылках на интуицию. Мы предпочитаем подойти к этому вопросу иначе. Различение знаков подразумевает возможность вынесения определенного суждения о тождестве или различии тех или иных элементарных графических конструкций. Знак (или комбинация) знаков становится субъектом метаматематического суждения, тогда как тождество или различие выступает его предикатом. Причем этот предикат присоединяется

в суждении к субъекту в зависимости от того, как именно построена данная конфигурация. Например, суждение о том, что графические конфигурации n , находящиеся в двух различных позициях формулы $x_n = 2^n$, тождественны, основано на том, что оба знака построены сообразно одной и той же графической схеме.

Таким образом, вопрос о тождестве или различии конструктивных элементов математического рассуждения решается с помощью суждения, которое, впрочем, находится в жесткой корреляции с процедурой построения наглядно представимого, зримого предмета. Тот факт, что отождествляя или различая знаки, мы, как правило, не делаем никаких суждений, не меняет ситуацию в принципе. Возможность такого суждения всегда присутствует. Акт различения или отождествления знаков не является некоторым первичным, неразложимым актом. Он выражается на логическом уровне. Первичной интуицией является здесь пространство, поскольку именно в качестве определенной пространственной конфигурации всякий знак может быть узан и отличен от другого знака.

Похожее рассмотрение можно провести и относительно математического рассуждения, поскольку оно есть объект метаматематики. Он предстает в виде определенной пространственной конфигурации, определяемой как способом сочетания составляющих его знаков, так и способом начертания самих этих знаков. Как чувственно воспринимаемый объект, рассуждение выступает в качестве субъекта метаматематического суждения. Задачей метаматематики оказывается установление ряда предикатов (например, предиката непротиворечивости) для названного субъекта. Но такого рода предикцирование есть выражение определенных пространственных свойств созерцаемого (создаваемого на бумаге или на доске) объекта¹². Суждение о непротиворечивости оказывается, таким образом, априорным и синтетическим в самом строгом кантовском смысле. Гильбертовская метаматематика содержит в себе все установленные Кантом элементы знания: данный в созерцании объект, являющийся в пространстве и времени, синтетическое суждение об этом объекте и, наконец, синтез продуктивной способности воображения, в результате которого этот объект конструируется.

Таким образом, две соперничающие математические школы имеют один и тот же философский корень. Можно сказать, что каждая из них сделала больший акцент на одной из двух выделенных Кантом интуиций. Если Брауэр считал исходной интуицию времени, явно утверждая вторичность и производность пространства, то Гильберт, вообще ничего не говоря о времени, явно рассматривал пространство и пространственное конструирование как основу математики. Очевидная кантианская родословная двух влиятельных философско-математических традиций требует, конечно, более детального анализа кантовского текста.

ПРИМЕЧАНИЯ

¹ См.: Кантор Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985.

² См. там же.

³ Хотя Кантор и пытается выстроить иерархию математических понятий, подобную родо-видовой иерархии, и рассмотреть все построенные так объекты как некие субстантивированные универсалии, предлагаемая им процедура выделения общих свойств имеет мало общего с абстрагированием. Как мощность, так и порядковый тип бесконечного множества нельзя определить как его собственное свойство. Оно не обладает этим свойством как субстанция своим атрибутом. Мощность бесконечного множества определяется как свойство отношения множеств. Сущности можно приписывать признак, рассматривая ее саму по себе, независимо от других сущностей. Мощность множества (как и его порядковый тип) устанавливается только для класса множеств. Поэтому подвести его представление о существовании под аристотелевское учение о сущности невозможно без серьезных натяжек, хотя сам Кантор, по-видимому, хотел именно этого.

⁴ Цит. по: *Гейтинг А.* Обзор исследований по основаниям математики. – М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.

⁵ Брауэр говорит о качественно различимых частях или различимых вещах. В любом случае речь идет о дискретной последовательности событий, характеризующих когнитивную деятельность.

⁶ Математическое развитие этих идей содержится в теории континуума Брауэра как среды становления для свободно становящихся последовательностей. Дискретные последовательности точек, выбираемых из среды сообразно некоторому закону или согласно свободному выбору, разбивают континуум на все более мелкие части, устанавливая определенную структуру отношений между этими частями.

⁷ *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. – М.: Мир, 1966.

⁸ *Гейтинг А.* Обзор исследований по основаниям математики.

⁹ *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. – С. 322.

¹⁰ Там же. – С. 321.

¹¹ Там же.

¹² Близкий подход к математике разрабатывался под названием «пангеометризм».

Аннотация

В статье излагаются взгляды Кантора, Брауэра и Гильберта, представителей главных философско-математических школ, на понимание вопроса существования объекта в математике. При написании были использованы материалы докладов аспирантов-математиков.

Ключевые слова: интерпретация, интуиционизм, математика, множество, объект, рассуждение, существование, финитный.

Summary

We give Cantor's, Brouwer's and Gilbert's basic points of view, representatives of main philosophical schools in mathematics in the question of object existence. We used some materials of graduate students.

Keywords: argument, existence, finite, interpretation, intuitionism, mathematics, object, set.